CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

en la cual se supone α, β, γ constantes; para determinar F se escribirán las ecuaciones

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}$$

De ellas se deduce

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma} + C_1$$

$$\frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} + C_2$$

Luego la solucion es

$$F=\psi\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}, \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}\right)$$

Al igualar la funcion F a una constante se obtiene la ecuacion jeneral de los cilindros cuyas jeneratrices son paralelas a la direccion α, β, γ.

Sea tambien la ecuacion

$$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

en la cual a, b, c son constantes; se escribirá

$$\frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b}=\frac{dz}{z-c}$$

De ellas se deduce

$$\frac{x-a}{z-c}=C_1$$

$$\frac{y-b}{z-c}=C_2$$

Luego la solucion es

$$F=\psi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)$$

Si se iguala F a una constante se obtiene la ecuacion de un cono cuyo vértice es el punto a, b, c.

Sea finalmente la ecuacion

$$y \frac{\partial F}{\partial x} - x \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Se escribirá

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

De aquí se deduce

$$xdx + ydy = 0$$
$$dz = 0$$

Luego

$$x^2 + y^2 = C_1$$
$$z = C_2$$

La solucion es por consiguiente

$$F = \psi\,(x^2 + y^2, z)$$

Al igualar F a una constante se obtiene la ecuacion de una superficie de revolucion al rededor de OZ.

Ecuaciones lineales con segundo miembro

Consideremos ahora una ecuacion lineal con segundo miembro

$$P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = R \tag{8}$$

i supongamos que P, Q sean funciones de x, y i R funcion de x, y, F; el valor buscado de la funcion F puede definirse por medio de la ecuacion

$$\phi\,(x, y, F) = 0$$

i de ésta se deduce

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\, dF = 0$$

Luego

$$\frac{\partial F}{dx} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

Llevemos estos valores en (8), obtendremos

$$P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y} + R \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Es una ecuacion lineal sin segundo miembro i con tres variables x, y, F; se resolverá segun la regla establecida mas arriba.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = m F \tag{9}$$

Se determinará una funcion ϕ por medio de la ecuacion

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} + m F \frac{\partial \phi}{\partial F} = 0$$

El método indicado mas arriba da entónces

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dF}{mF}$$

i de aquí se deduce

$$\frac{y}{x} = C_1$$

$$\frac{F}{x^m} = C_2$$

Luego

$$\phi = \psi\left(\frac{y}{x},\ \frac{F}{x^{m}}\right) = 0$$

Esta ecuacion equivale a

$$F = x^{m} f\left(\frac{y}{x}\right)$$

De suerte que (9) es la ecuacion característica de las funciones homojéneas de grado m.

Ecuaciones lineales sin segundo miembro, entre un número cualquiera de variables

Hasta ahora, la jeometría nos ha conducido a la solucion de las ecuaciones de dos o tres variables, i se puede observar que, en los dos casos, hai una gran analojía. Esta analojía se conserva en el caso jeneral de n variables; sea la ecuacion

$$(10) \qquad P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

$P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$ son funciones de las n variables $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$. Escribiremos como mas arriba

$$(11) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n}$$

Es un sistema de $n-1$ ecuaciones diferenciales del primer órden; si ellas se pueden integrar se podrá escribir el resultado de la integracion bajo la forma

$$\begin{aligned}
\phi_1 (x_1\ x_2 \ldots . x_n) &= C_1 \\
\phi_2 (x_1\ x_2 \ldots . x_n) &= C_2 \\
&\vdots \\
\phi_{n-1} (x_1\ x_2 \ldots . x_n) &= C_{n-1}
\end{aligned}$$

Cada una de las $n-1$ funciones $\phi_1\ \phi_2 \ldots . \phi_{n-1}$ es una solucion de la ecuacion; se tiene en efecto, para una cualquiera de ellas,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots \frac{\partial \phi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Como esta ecuacion no contiene ninguna constante arbitraria, ella debe ser una consecuencia de (11), luego se debe tener tambien

$$P_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + P_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \ldots . + P_n \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = 0$$

Esto prueba que ϕ es una solucion de la ecuacion propuesta. Por otra parte, se averigua, como mas arriba, que una funcion cualquiera de $\phi_1\ \phi_2 \ldots . \phi_n$ es tambien una solucion i que, recíprocamente, toda solucion de (10) es una funcion de $\phi_1\ \phi_2 \ldots \phi_n$; luego la funcion mas jeneral que satisface a (10) es

$$F = \psi\, (\phi_1\ \phi_2 \ldots . \phi_n)$$

Ecuacion no lineal entre las derivadas parciales de una funcion de dos variables

Sea la ecuacion

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \tag{12}$$

Para determinar la funcion z de x, y que satisface a esta ecuacion se buscará, en primer lugar, una funcion

$$\phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=C \tag{13}$$

tal que los valores de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ deducidos de (12) i (13) satisfagan a la condicion

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \tag{14}$$

Veamos cual debe ser la forma de la funcion ϕ; escribamos las derivadas parciales de (12) i (13) respecto de x, y i pongamos, para simplificar,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q$$

Tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\,\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\,\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial z}p+\frac{\partial \phi}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial q}\,\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial z}q+\frac{\partial \phi}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial q}\,\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

Multipliquemos respectivamente estas cuatro ecuaciones por $\frac{\partial \phi}{\partial p}$, $-\frac{\partial \phi}{\partial q}$, $+\frac{\partial f}{\partial p}$, $+\frac{\partial f}{\partial q}$ i sumamos; observemos ademas que la condicion (14) equivale a

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Se obtendrá

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\left(p\,\frac{\partial f}{\partial p}+q\,\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial \phi}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0$$

Esta es una ecuacion lineal entre las derivadas parciales de la funcion ϕ; luego la funcion será definida por las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}}$$

$$= \frac{-dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Sea

$$\phi(x, y. z, p, q) = C$$

una integral de estas ecuaciones.

La funcion ϕ i la ecuacion propuesta f permitirán esprcsar los valores de p i q en funcion de x, y, z i de la constante C.

Se tiene en seguida

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = p\,dx + q\,dy$$

Esta ecuacion es integrable porque la relacion (14) es satisfecha, se obtendrá, por consiguiente,

(15) $$z = \psi(x, y, C, C')$$

Este valor de F con dos constantes arbitrarias se llama *integral completa* de la ecuacion (12).

Reemplacemos C' por una funcion arbitraria de C, $\chi(C)$ por ejemplo, i eliminemos C entre las ecuaciones

$$z = \psi \left\{ x, y, C, \chi(C) \right\}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial C} + \frac{\partial \psi}{\partial C'} \chi' = 0$$

Obtendremos un valor de z, sin constante i con una funcion arbitraria χ; este nuevo valor, llamado *integral jeneral* satisface tambien a la ecuacion propuesta (12); en efecto, cualesquiera que sean los valores constantes de C i $C' = \chi(C)$ la funcion z i sus derivadas parciales respecto de x, y, satisfacen a la ecuacion (12). En la integral jeneral, C es una funcion de x, y i las derivadas de z respecto a x, y son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial C} + \frac{\partial \psi}{\partial C'} \psi' \right) \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial C} + \frac{\partial \psi}{\partial C'} \psi' \right) \frac{\partial C}{\partial y}$$

Estas dos ecuaciones se reducen a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Luego las derivadas de z respecto a x, y son las mismas que en el caso de C i C' constantes, i ellas satisfacen por consiguiente a la ecuacion propuesta.

Aplicacion

1.º Sea la ecuacion

$$z = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$$

O bien

$$z = p\,q$$

Tendremos

$$f(x, y, z, p, q) = pq - z$$

Para determinar la funcion ϕ formaremos las ecuaciones

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

Se obtiene inmediatamente la integral

$$p = y + C$$

i la ecuacion propuesta da

$$q = \frac{z}{y + C}$$

Luego

$$dz = (y + C)\,dx + \frac{z}{y + C}\,dy$$

Segun esto la derivada parcial de z respecto de y es $\frac{z}{y+C}$ i se tiene

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y+C}$$

O bien

$$z=(y+C)\,\psi(x)$$

Por otra parte la derivada parcial de z respecto de x es

$$y+C$$

luego

$$y+C=(y+C)\,\psi'(x)$$

O bien

$$\psi'(x)=1$$

$$\psi(x)=x+C'$$

Se obtiene finalmente

$$z=(y+C)\,(x+C')$$

i esta es la integral completa de la ecuacion diferencial.

2.° Sea la ecuacion

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}=xy$$

O bien

$$pq - xy = 0$$

Tendremos

$$f(x\,y\,z\,p\,q) = pq - xy = 0$$

La funcion f no contiene z esplícitamente. Formemos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}$$

Se obtiene desde luego la integral

$$q^2 = x^2 + C_1$$

Luego

$$q = \sqrt{x^2 + C_1}$$

De la ecuacion propuesta se deduce en seguida

$$p = \frac{x\,y}{\sqrt{x^2 + C_1}}$$

Por consiguiente

$$dz = \frac{xy\,dx}{\sqrt{x^2 + C_1}} + dy\sqrt{x^2 + C_1}$$

O bien

$$z = y\sqrt{x^2 + C_1 + C}$$

Tal es la solucion completa de la ecuacion propuesta.

Ecuaciones entre las derivadas parciales de órden superior

La integracion de estas ecuaciones presenta en jeneral grandes dificultades i no existen reglas que convengan a todos los casos.

Cuando se trata de ecuaciones entre las derivadas parciales de segundo órden, lo mas natural es de buscar, en primer lugar, una integral entre las derivadas parciales de primer órden. Esplicaremos en qué consiste este método aplicándolo desde luego a una de las ecuaciones de la física. Sea la ecuacion

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Se trata de determinar la funcion z de x, y que satisfaga a esta ecuacion. Consideremos la ecuacion

$$(17) \qquad f(x y z p q) = 0$$

i busquemos cuál debe ser la forma de la funcion f para que la ecuacion propuesta (16) sea una consecuencia de (17).

A. OBRECHT

(Continuará)